NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária $i^2 = -1$
$\det M$	: determinante da matriz M
M^{-1}	: inversa da matriz M
MN	: produto das matrizes M e N
$\overline{AB}$	: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe uma bijeção $f : X \to Y$.

II. Existe uma função injetora $g : Y \to X$.

III. O número de funções injetoras $f : X \to Y$ é igual ao número de funções sobrejetoras $g : Y \to X$.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) nenhuma delas. B ( ) apenas I. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e II. E ( ) todas.

Questão 2. O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + \text{cossec}\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

A ( ) 0. B ( ) 1. C ( ) 2. D ( ) 3. E ( ) 4.

Questão 3. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d-140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

A ( ) -140. B ( ) -120. C ( ) 0. D ( ) 120. E ( ) 140.

Questão 4. O maior valor de $\text{tg}\, x$, com $x = \frac{1}{2}\text{arcsen}(\frac{3}{5})$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

A ( ) 1/4. B ( ) 1/3. C ( ) 1/2.
D ( ) 2. E ( ) 3.

Questão 5. Considere a reta r: $y = 2x$. Seja $A = (3, 3)$ o vértice de um quadrado $ABCD$, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em r. A área deste quadrado é

A ( ) $\dfrac{9}{5}$. B ( ) $\dfrac{12}{5}$. C ( ) $\dfrac{18}{5}$. D ( ) $\dfrac{21}{5}$. E ( ) $\dfrac{24}{5}$.

Questão 6. Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{27}{y^2} + \dfrac{8}{z^3} & = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{81}{y^2} + \dfrac{40}{z^3} & = 10 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{54}{y^2} + \dfrac{24}{z^3} & = 7 \end{cases} .$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

A ( ) 0. B ( ) 3. C ( ) 6. D ( ) 9. E ( ) 12.

Questão 7. O número de soluções inteiras da inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$ é

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 8. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

A ( ) 10. B ( ) 11. C ( ) 12. D ( ) 13. E ( ) 14.

Questão 9. Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ||x| - 1|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

A ( ) $\dfrac{25}{4}\pi - 2$. B ( ) $\dfrac{25}{4}\pi - 1$. C ( ) $\dfrac{25}{4}\pi$. D ( ) $\dfrac{75}{4}\pi - 1$. E ( ) $\dfrac{75}{4}\pi - 2$.

Questão 10. Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$.

II. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\dfrac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$.

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas I e II.
D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 11. Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

A ( ) 144. B ( ) 180. C ( ) 240. D ( ) 324. E ( ) 360.

Questão 12. Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\dfrac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\dfrac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

A ( ) $\dfrac{\sqrt{123}}{2}$. B ( ) $\dfrac{\sqrt{129}}{2}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{131}}{2}$. D ( ) $\dfrac{\sqrt{135}}{2}$. E ( ) $\dfrac{\sqrt{137}}{2}$.

Questão 13. Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos.

II. Existe um número $x \in [0, \pi/2]$ de tal modo que os números $a_1 = \operatorname{sen} x$, $a_2 = \operatorname{sen}(x + \pi/4)$, $a_3 = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ e $a_4 = \operatorname{sen}(x + 3\pi/4)$ estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.

III. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e II. E ( ) todas.

Questão 14. Com os elementos $1, 2, \ldots, 10$ são formadas todas as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$. Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

A ( ) $\dfrac{7!}{10^7 \cdot 3!}$. B ( ) $\dfrac{10!}{10^7 \cdot 3!}$. C ( ) $\dfrac{3!}{10^7 \cdot 7!}$. D ( ) $\dfrac{10!}{10^3 \cdot 7!}$. E ( ) $\dfrac{10!}{10^7}$.

Questão 15. Considere a equação $(a - bi)^{501} = \dfrac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250} + 1}$.

O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

A ( ) 500. B ( ) 501. C ( ) 502. D ( ) 503. E ( ) 504.

Questão 16. Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado $\overline{BC}$ tais que $\overline{AM}$ é a altura relativa a $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. A área do triângulo AMN, em cm^2, é

A ( ) $3,36$. B ( ) $3,60$. C ( ) $4,20$. D ( ) $4,48$. E ( ) $6,72$.

Questão 17. Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo. O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

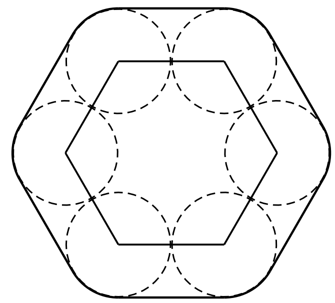
A ( ) $18 + 3\pi$.

B ( ) $30 + 10\pi$.

C ( ) $18 + 6\pi$.

D ( ) $60 + 10\pi$.

E ( ) $36 + 6\pi$.



Questão 18. O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

A ( ) uma circunferência.
B ( ) uma parábola.
C ( ) uma hipérbole.
D ( ) uma reta.
E ( ) duas retas paralelas.

Questão 19. Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de 2/3, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

A ( ) $\frac{120}{160}$. B ( ) $\frac{119}{154}$. C ( ) $\frac{110}{144}$. D ( ) $\frac{105}{135}$. E ( ) $\frac{119}{144}$.

Questão 20. Considere o triângulo ABC, em que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja D um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja E um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de D, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em cm, de $\overline{CE}$ é

A ( ) $\frac{11\sqrt{6}}{3}$. B ( ) $\frac{13\sqrt{6}}{3}$. C ( ) $\frac{17\sqrt{6}}{3}$. D ( ) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$. E ( ) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as retas de equações

$$r:\ y=\sqrt{2}x+a \qquad \text{e} \qquad s:\ y=bx+c,$$

em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0,1)$ e s, por $(\sqrt{2},4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

Questão 22. Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Questão 23. Considere o polinômio

$$p(x)=x^4-(1+2\sqrt{3})x^3+(3+2\sqrt{3})x^2-(1+4\sqrt{3})x+2.$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x)=(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

Questão 24. Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f: B \to A$ existem?

Questão 25. Sejam $A=\{1,2,\ldots,29,30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q>1$.

a) Determine todas as progressões geométricas $(a_1, a_2,\ a_3)$ de razão $q=\frac{3}{2}$.

b) Escreva $q=\dfrac{m}{n}$, com $m,n\in\mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(m,n)=1$. Determine o maior valor possível para n.

Questão 26. Esboce o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\left|2^{-|x|}-\frac{1}{2}\right|.$$

Questão 27. Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x+ay+z &= \ \ 2 \\ -x-2y+3z &= -1 \\ 3x+az &= \ \ 5 \end{cases}.$$

Questão 28. Um triângulo retângulo com hipotenusa $c=2(1+\sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

Questão 29. Determine o conjunto das soluções reais da equação $3\text{cossec}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\text{tg}^2 x=1$.

Questão 30. Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta 2 tal que: $ABCD$ é o quadrado da base inferior; $EFGH$, o quadrado da base superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.