NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Im}(z)$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$

$\det M$: determinante da matriz M

M^T : transposta da matriz M

M^{-1} : inversa da matriz M

I_n : matriz identidade $n \times n$

MN : produto das matrizes M e N

$\mathrm{d}(P, r)$: distância do ponto P à reta r

$\overline{AB}$: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$X \setminus Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas II e III.
D ( ) I, II e III. E ( ) apenas III.

Questão 2. Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

A ( ) 285. B ( ) 286. C ( ) 287. D ( ) 288. E ( ) 289.

Questão 3. Escolhendo-se, aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo $[1, 20]$, a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a

A ( ) $\frac{2}{285}$. B ( ) $\frac{2}{217}$. C ( ) $\frac{1}{190}$. D ( ) $\frac{4}{225}$. E ( ) $\frac{1}{380}$.

Questão 4. Se $\text{tg}x = \sqrt{7}$ e $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, então $\text{sen}3x$ é igual a

A ( ) $-\dfrac{\sqrt{14}}{8}$. B ( ) $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. D ( ) $-\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. E ( ) $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

Questão 5. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas II e III.
D ( ) I, II e III. E ( ) apenas III.

Questão 6. Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.

II. P_n é circunscritível a uma circunferência.

III. Se ℓ_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\dfrac{a_n}{\ell_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e II. E ( ) I, II e III.

Questão 7. Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm^2. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

A ( ) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. B ( ) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. C ( ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D ( ) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. E ( ) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

Questão 8. Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 4z &= 2 \\ x + 2y + 7z &= 3 \\ 3x + y + az &= b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

A ( ) $a = 6$ e $b \neq 4$. B ( ) $a \neq 6$ e $b \neq 4$. C ( ) $a \neq 6$ e $b = 4$.

D ( ) $a = 6$ e $b = 4$. E ( ) a é arbitrário e $b \neq 4$.

Questão 9. Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a

A ( ) $-\dfrac{3}{5}$. B ( ) $-\dfrac{3}{7}$. C ( ) $-\dfrac{2}{5}$. D ( ) $-\dfrac{4}{5}$. E ( ) $-\dfrac{1}{7}$.

Questão 10. Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $\ell\sqrt{5}$, em que ℓ é o comprimento da hipotenusa. Se α e β são seus ângulos agudos, com $\alpha < \beta$, então $\operatorname{sen}(\beta - \alpha)$ é igual a

A ( ) $5 - 2\sqrt{5}$. B ( ) $-6 + 3\sqrt{5}$. C ( ) $\sqrt{16\sqrt{5} - 35}$.
D ( ) $\sqrt{20\sqrt{5} - 44}$. E ( ) $\sqrt{18\sqrt{5} - 40}$.

Questão 11. Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

A ( ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ B ( ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ C ( ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ D ( ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ E ( ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Questão 12. Considere as afirmações a seguir:

I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.

II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.

III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) I, II e III.

Questão 13. Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a

A ( ) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B ( ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C ( ) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D ( ) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. E ( ) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Questão 14. Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ e $(6, 4)$ em duas regiões de mesma área, então o valor de a é igual a

A ( ) $2\sqrt{5} - 1$. B ( ) $2\sqrt{6} - 1$. C ( ) $3\sqrt{5} - 4$. D ( ) $2\sqrt{7} - 2$. E ( ) $3\sqrt{7} - 5$.

Questão 15. Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, em que os expoentes $8, m, n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p.

II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p.

III. p tem quatro raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) I, II e III.

Questão 16. Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que $BM = MN = NC$. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de $\cos\alpha$ é

A ( ) $\frac{13}{14}$. B ( ) $\frac{14}{15}$. C ( ) $\frac{15}{16}$. D ( ) $\frac{16}{17}$. E ( ) $\frac{17}{18}$.

Questão 17. Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

A ( ) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$. B ( ) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$. C ( ) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$. D ( ) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$. E ( ) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$.

Questão 18. Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2+i)z^3 + (2+i)z^2 + (2+i)z + (1+i).$$

Podemos afirmar que

A ( ) nenhuma das raízes de p é real.

B ( ) não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.

C ( ) a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.

D ( ) o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.

E ( ) o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

Questão 19. Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a

A ( ) 10 B ( ) 15 C ( ) 20 D ( ) 25 E ( ) 30

Questão 20. Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P, M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que

a) P é o ponto médio de $\overline{AB}$;

b) M é o ponto médio de $\overline{BC}$;

c) PN é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$.

Então, o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a

A ( ) $\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}$ B ( ) $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ C ( ) $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

D ( ) $\sqrt{10 - 5\sqrt{3}}$ E ( ) $\sqrt{5\sqrt{3} - 5}$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:
a) O domínio D_f da função f.
b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.
b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

Questão 22. Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \operatorname{sen} y & = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos y & = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Questão 23. Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios R_H e R_T, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\frac{R_H}{R_T}$.

Questão 24. Seja A a matriz de ordem 3×2, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

Questão 25. Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste.

Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

Questão 26. Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se *distância de P a S*, $d(P, S)$, como a menor das distâncias $d(P, Q)$, com $Q \in S$:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) : Q \in S\}.$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

a) Determine $d(P, S_1)$ quando $P = (1, 4)$ e $d(Q, S_1)$ quando $Q = (-3, 0)$.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2.

Questão 27. Sejam a, b, c números reais com $a \neq 0$.

a) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

numa equação de segundo grau.

b) Determine todas as raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Questão 28. Considere as circunferências

$$\lambda_1 : x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$$

e

$$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8.$$

O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;

b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;

c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

Questão 29. Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Questão 30. Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.