

NOTAÇÕES

| | |
|--|--|
| \mathbb{N} : conjunto dos números naturais \mathbb{Z} : conjunto dos números inteiros \mathbb{R} : conjunto dos números reais $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$ $\det(M)$: determinante da matriz M M^t : transposta da matriz M $A \setminus B$: $\{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ $\sum_{n=0}^k a_n x^n$: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, k \in \mathbb{N}$ $\text{Arg } z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Arg } z \in [0, 2\pi[$ A^C : conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A \overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B \hat{ABC} : ângulo formado pelos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , com vértice no ponto B . | \mathbb{C} : conjunto dos números complexos i : unidade imaginária, $i^2 = -1$ $ z $: módulo do número $z \in \mathbb{C}$ $\text{Re } z$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$ $[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ $[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ $]a, b]$: $\{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ $\sum_{n=0}^k a_n$: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k, k \in \mathbb{N}$ |
|--|--|

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U . Das afirmações:

- I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
- II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$;
- III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas I e II.
 D () apenas I e III. E () todas.

Questão 02. A soma das raízes da equação em \mathbb{C} , $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

- A () 1. B () 2. C () 3. D () 4. E () 5.

Questão 03. Considere a equação em \mathbb{C} , $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

- A () $\sqrt{29}$. B () $\sqrt{41}$. C () $3\sqrt{5}$. D () $4\sqrt{3}$ E () $3\sqrt{6}$.

Questão 04. A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44 \left(2^{\sqrt{x+1}} \right) + 64 = 19 \left(4^{\sqrt{x+1}} \right)$$

é igual a

- A () 8. B () 12. C () 16. D () 18. E () 20.

Questão 05. Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

- A () $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B () 1. C () $\sqrt{2}$. D () 2. E () $3\sqrt{2}$.

Questão 06. Considere as funções f e g , da variável real x , definidas, respectivamente, por

$$f(x) = e^{x^2+ax+b} \quad \text{e} \quad g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que

- A () $g \circ f(1) = \ln 3$.
B () $\nexists g \circ f(0)$.
C () $g \circ f$ nunca se anula.
D () $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
E () $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Questão 07. Considere funções $f, g, f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das afirmações:

- I. Se f e g são injetoras, $f + g$ é injetora;
- II. Se f e g são sobrejetoras, $f + g$ é sobrejetora;
- III. Se f e g não são injetoras, $f + g$ não é injetora;
- IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f + g$ não é sobrejetora,

é (são) verdadeira(s)

- A () nenhuma. B () apenas I e II. C () apenas I e III.
D () apenas III e IV. E () todas.

Questão 08. Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

- A () 1. B () 2. C () 3. D () 4. E () 5.

Questão 09. Considere a equação $\sum_{n=0}^5 a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a -2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum_{n=0}^5 a_n$ é igual a

- A () -21 . B () $-\frac{2}{3}$. C () $\frac{21}{32}$. D () $\frac{63}{32}$. E () 63.

Questão 10. Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9} + \sqrt{2\lambda+17} = 12$. Então a soma das soluções z , com $\text{Re } z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

- A () $\sqrt{2}$. B () $2\sqrt{2}$. C () $4\sqrt{2}$. D () 4. E () 16.

Questão 11. Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω . Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

- A () $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. B () $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. C () $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.
D () $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$. E () $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Questão 12. Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

- I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.
II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

- A () dos três resultados, I é o mais provável.
B () dos três resultados, II é o mais provável.
C () dos três resultados, III é o mais provável.
D () os resultados I e II são igualmente prováveis.
E () os resultados II e III são igualmente prováveis.

Questão 13. Considere $A \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6} \alpha^2$, o valor de α é

- A () $\frac{1}{6}$. B () $\frac{\sqrt{6}}{6}$. C () $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$. D () 1. E () $\sqrt{216}$.

Questão 14. Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \sin^8 x + 4 \sin^6 x = a$. Das afirmações:

- I. Se $a = 0$, então $n = 0$;
II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;
III. Se $a = 1$, então $n = 7$;
IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas III. C () apenas I e III.
D () apenas II e IV. E () todas.

Questão 15. Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{\cotg x - 1}{\operatorname{cosec}(x - \pi) - \sec(\pi - x)}$ é

- A () $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B () 1. C () $\sqrt{2}$. D () $\sqrt{3}$. E () 2.

Questão 16. Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C , tal que o ângulo \widehat{ABC} seja obtuso. Então o ângulo \widehat{CAB} é igual a

- A () $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$. B () $\frac{3}{2}\pi - 2\widehat{ABC}$. C () $\frac{2}{3}\widehat{ABC}$.
 D () $2\widehat{ABC} - \pi$. E () $\widehat{ABC} - \frac{\pi}{2}$.

Questão 17. Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

- A () ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox .
 B () ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox .
 C () ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox .
 D () a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.
 E () a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Questão 18. Das afirmações:

- I. Duas retas coplanares são concorrentes;
 II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;
 III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
 IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

- A () III. B () I e III. C () II e III.
 D () III e IV. E () I e II e IV.

Questão 19. Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V , determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3 , do sólido $VABC$ é

- A () 2. B () 4. C () $\sqrt{17}$. D () 6. E () $5\sqrt{10}$.

Questão 20. No sistema xOy os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

- A () 1. B () $\frac{100}{105}$. C () $\frac{10}{11}$. D () $\frac{100}{115}$. E () $\frac{5}{6}$.

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER
 RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

Questão 21. Para $z = 1 + iy$, $y > 0$, determine todos os pares (a, y) , $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva a e y em função de $\text{Arg } z$.

Questão 22. Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{x(\frac{\pi}{4}-x)}(4 \operatorname{sen} x \cos x - 1).$$

Questão 23. Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x , $x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $] - 2, 2[$.

Questão 24. Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Questão 25. Considere o sistema na variável real x :

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta. \end{cases}$$

(a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

(b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Questão 26. Considere o sistema nas variáveis reais x e y :

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} \alpha + 3y \cos \alpha = a \\ x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = b, \end{cases}$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α , a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Questão 27. Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta) \cos \alpha \operatorname{sen} \beta - 2 \cos^2(\alpha - \beta) = -1 \quad \text{e} \quad \sqrt{3} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}.$$

Questão 28. Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)(y + \frac{x}{2} - 2) = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0.$$

Questão 29. Em um triângulo de vértices A , B e C , a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C , dividem o ângulo \widehat{BCA} em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C , calcule:

(a) A medida da mediana em função de l .

(b) Os ângulos \widehat{CAB} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} .

Questão 30. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A , B , C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E , F , G e H . As medidas das arestas distintas AB , AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm . Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm^3 . Calcule:

(a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

(b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.