

## NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais	$\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros	$i$ : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais	$\bar{z}$ : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais	$ z $ : módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  : conjunto das matrizes reais  $m \times n$   
 $\det M$  : determinante da matriz  $M$

$P(A)$  : conjunto de todos os subconjuntos do conjunto  $A$

$n(A)$  : número de elementos do conjunto finito  $A$

$\overline{AB}$  : segmento de reta unindo os pontos  $A$  e  $B$

$\hat{ABC}$  : ângulo formado pelos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , com vértice no ponto  $B$

$$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

**Observação:** Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

**Questão 01.** Dado  $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ , então  $\sum_{n=1}^{89} z^n$  é igual a

- A ( )  $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$ .                      B ( )  $-1$ .                      C ( )  $0$ .
- D ( )  $1$ .                                  E ( )  $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$ .

**Questão 02.** Das afirmações abaixo sobre números complexos  $z_1$  e  $z_2$  :

I -  $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$ .

II -  $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |z_2||$ .

III - Se  $z_1 = |z_1|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$ , então  $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$ .

é(são) sempre verdadeira(s)

- A ( ) apenas I.                      B ( ) apenas II.                      C ( ) apenas III.
- D ( ) apenas II e III.              E ( ) todas.

**Questão 03.** A soma de todas as soluções da equação em  $\mathbb{C}$  :  $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$  é igual a

- A ( )  $2$ .                      B ( )  $\frac{i}{2}$ .                      C ( )  $0$ .                      D ( )  $-\frac{1}{2}$ .                      E ( )  $-2i$ .

**Questão 04.** Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

- A ( )  $\frac{7}{8}$ .      B ( )  $\frac{5}{7}$ .      C ( )  $\frac{5}{8}$ .      D ( )  $\frac{3}{5}$ .      E ( )  $\frac{3}{7}$ .

**Questão 05.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos e não vazios tais que  $A \subset B$  e  $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$ . Então, das afirmações abaixo:

- I* –  $n(B) - n(A)$  é único;  
*II* –  $n(B) + n(A) \leq 128$ ;  
*III* – a dupla ordenada  $(n(A), n(B))$  é única;

é(são) verdadeira(s)

- A ( ) apenas *I*.      B ( ) apenas *II*.      C ( ) apenas *III*.  
D ( ) apenas *I* e *II*.      E ( ) nenhuma.

**Questão 06.** O sistema 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$$

- A ( ) é possível,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .  
B ( ) é possível quando  $a = \frac{7b}{3}$  ou  $c \neq 1$ .  
C ( ) é impossível quando  $c = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .  
D ( ) é impossível quando  $a \neq \frac{7b}{3}, \forall c \in \mathbb{R}$ .  
E ( ) é possível quando  $c = 1$  e  $a \neq \frac{7b}{3}$ .

**Questão 07.** Considere as afirmações abaixo:

- I* – Se  $M$  é uma matriz quadrada de ordem  $n > 1$ , não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula  $N$ , de mesma ordem, tal que  $MN$  é matriz nula.  
*II* – Se  $M$  é uma matriz quadrada inversível de ordem  $n$  tal que  $\det(M^2 - M) = 0$ , então existe matriz não-nula  $X$ , de ordem  $n \times 1$ , tal que  $MX = X$ .

*III* – A matriz 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec \theta} & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$
 é inversível,  $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Destas, é(são) verdadeira(s)

- A ( ) apenas *II*.      B ( ) apenas *I* e *II*.      C ( ) apenas *I* e *III*.  
D ( ) apenas *II* e *III*.      E ( ) todas.

**Questão 08.** Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação  $x^4 + x^2 + ax + b = 0$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $a^2 - b^3$  é igual a

- A ( )  $-64$ .      B ( )  $-36$ .      C ( )  $-28$ .      D ( )  $18$ .      E ( )  $27$ .

**Questão 09.** O produto das raízes reais da equação  $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$  é igual a  
A ( )  $-5$ .      B ( )  $-1$ .      C ( )  $1$ .      D ( )  $2$ .      E ( )  $5$ .

**Questão 10.** Considere a equação algébrica  $\sum_{k=1}^3 (x - a_k)^{4-k} = 0$ . Sabendo que  $x = 0$  é uma das raízes e que  $(a_1, a_2, a_3)$  é uma progressão geométrica com  $a_1 = 2$  e soma  $6$ , pode-se afirmar que  
A ( ) a soma de todas as raízes é  $5$ .  
B ( ) o produto de todas as raízes é  $21$ .  
C ( ) a única raiz real é maior que zero.  
D ( ) a soma das raízes não reais é  $10$ .  
E ( ) todas as raízes são reais.

**Questão 11.** A expressão  $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$ , com  $x$  e  $y$  reais, representa  
A ( ) o conjunto vazio.  
B ( ) um conjunto unitário.  
C ( ) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.  
D ( ) um conjunto com um número infinito de pontos.  
E ( ) o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$ .

**Questão 12.** Com respeito à equação polinomial  $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$  é correto afirmar que  
A ( ) todas as raízes estão em  $\mathbb{Q}$ .  
B ( ) uma única raiz está em  $\mathbb{Z}$  e as demais estão em  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .  
C ( ) duas raízes estão em  $\mathbb{Q}$  e as demais têm parte imaginária não-nula.  
D ( ) não é divisível por  $2x - 1$ .  
E ( ) uma única raiz está em  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  e pelo menos uma das demais está em  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Questão 13.** Sejam  $m$  e  $n$  inteiros tais que  $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$  e a equação  $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$  representa uma circunferência de raio  $r = 1$  *cm* e centro  $C$  localizado no segundo quadrante. Se  $A$  e  $B$  são os pontos onde a circunferência cruza o eixo  $Oy$ , a área do triângulo  $ABC$ , em  $cm^2$ , é igual a  
A ( )  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ .      B ( )  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ .      C ( )  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      D ( )  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ .      E ( )  $\frac{\sqrt{2}}{9}$ .

**Questão 14.** Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a  
A ( )  $\frac{23}{11}\pi$ .      B ( )  $\frac{13}{6}\pi$ .      C ( )  $\frac{24}{11}\pi$ .      D ( )  $\frac{25}{11}\pi$ .      E ( )  $\frac{7}{3}\pi$ .

**Questão 15.** Seja  $ABC$  um triângulo retângulo cujos catetos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  medem  $8$  *cm* e  $6$  *cm*, respectivamente. Se  $D$  é um ponto sobre  $\overline{AB}$  e o triângulo  $ADC$  é isósceles, a medida do segmento  $\overline{AD}$ , em *cm*, é igual a  
A ( )  $\frac{3}{4}$ .      B ( )  $\frac{15}{6}$ .      C ( )  $\frac{15}{4}$ .      D ( )  $\frac{25}{4}$ .      E ( )  $\frac{25}{2}$ .

**Questão 16.** Sejam  $ABCD$  um quadrado e  $E$  um ponto sobre  $\overline{AB}$ . Considere as áreas do quadrado  $ABCD$ , do trapézio  $BEDC$  e do triângulo  $ADE$ . Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é  $200 \text{ cm}^2$ , a medida do segmento  $\overline{AE}$ , em  $\text{cm}$ , é igual a

- A ( )  $\frac{10}{3}$ .      B ( ) 5.      C ( )  $\frac{20}{3}$ .      D ( )  $\frac{25}{3}$ .      E ( ) 10.

**Questão 17.** Num triângulo  $ABC$  o lado  $\overline{AB}$  mede  $2 \text{ cm}$ , a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  mede  $1 \text{ cm}$ , o ângulo  $\hat{A}BC$  mede  $135^\circ$  e  $M$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ . Então a medida de  $\hat{B}AC + \hat{B}MC$ , em  $\text{radianos}$ , é igual a

- A ( )  $\frac{1}{5}\pi$ .      B ( )  $\frac{1}{4}\pi$ .      C ( )  $\frac{1}{3}\pi$ .      D ( )  $\frac{3}{8}\pi$ .      E ( )  $\frac{2}{5}\pi$ .

**Questão 18.** Um triângulo  $ABC$  está inscrito numa circunferência de raio  $5 \text{ cm}$ . Sabe-se ainda que  $\overline{AB}$  é o diâmetro,  $\overline{BC}$  mede  $6 \text{ cm}$  e a bissetriz do ângulo  $\hat{A}BC$  intercepta a circunferência no ponto  $D$ . Se  $\alpha$  é a soma das áreas dos triângulos  $ABC$  e  $ABD$  e  $\beta$  é a área comum aos dois, o valor de  $\alpha - 2\beta$ , em  $\text{cm}^2$ , é igual a

- A ( ) 14.      B ( ) 15.      C ( ) 16.      D ( ) 17.      E ( ) 18.

**Questão 19.** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede  $12 \text{ cm}$  e a aresta da base mede  $\frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ cm}$ . Então o raio da esfera, em  $\text{cm}$ , é igual a

- A ( )  $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ .      B ( )  $\frac{13}{3}$ .      C ( )  $\frac{15}{4}$ .      D ( )  $2\sqrt{3}$ .      E ( )  $\frac{10}{3}$ .

**Questão 20.** Considere as afirmações:

- I – Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida  $a = 120^\circ$ .
- II – Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $50^\circ$  e  $170^\circ$ .
- III – Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.
- IV – A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é  $2880^\circ$ .

Destas, é(são) correta(s) apenas

- A ( ) II.      B ( ) IV.      C ( ) II e IV.  
D ( ) I, II e IV.      E ( ) II, III e IV.

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

**Questão 21.** Analise a existência de conjuntos  $A$  e  $B$ , ambos não-vazios, tais que  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$ .

**Questão 22.** Sejam  $n \geq 3$  ímpar,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $z_1, z_2, \dots, z_n$  as raízes de  $z^n = 1$ . Calcule o número de valores  $|z_i - z_j|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , com  $i \neq j$ , distintos entre si.

**Questão 23.** Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

**Questão 24.** Resolva a inequação em  $\mathbb{R}$ :  $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19)}$ .

**Questão 25.** Determine todas as matrizes  $M \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tais que  $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

**Questão 26.** Determine todos os valores de  $m \in \mathbb{R}$  tais que a equação  $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$  tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

**Questão 27.** Considere uma esfera  $\Omega$  com centro em  $C$  e raio  $r = 6 \text{ cm}$  e um plano  $\Sigma$  que dista  $2 \text{ cm}$  de  $C$ . Determine a área da intersecção do plano  $\Sigma$  com uma cunha esférica de  $30^\circ$  em  $\Omega$  que tenha aresta ortogonal a  $\Sigma$ .

**Questão 28.**

a) Calcule  $(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \sin^2 \frac{\pi}{5}) \cos \frac{\pi}{10} - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{10}$ .

b) Usando o resultado do item anterior, calcule  $\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$ .

**Questão 29.** Num triângulo  $AOB$  o ângulo  $\hat{AOB}$  mede  $135^\circ$  e os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{OB}$  medem  $\sqrt{2} \text{ cm}$  e  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}$ , respectivamente. A circunferência de centro em  $O$  e raio igual à medida de  $\overline{OB}$  intercepta  $\overline{AB}$  no ponto  $C (\neq B)$ .

a) Mostre que  $\hat{OAB}$  mede  $15^\circ$ .

b) Calcule o comprimento de  $\overline{AC}$ .

**Questão 30.** Considere um triângulo equilátero cujo lado mede  $2\sqrt{3} \text{ cm}$ . No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio  $r$ . O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de  $r$ .

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.