

NOTAÇÕES

\mathbb{N} : conjunto dos números naturais	\mathbb{C} : conjunto dos números complexos
\mathbb{Z} : conjunto dos números inteiros	i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
\mathbb{Q} : conjunto dos números racionais	\bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
\mathbb{R} : conjunto dos números reais	$ z $: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
 $\det M$: determinante da matriz M

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

\overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B

\hat{ABC} : ângulo formado pelos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , com vértice no ponto B

$$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01. Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

- A () $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$. B () -1 . C () 0 .
- D () 1 . E () $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$.

Questão 02. Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2 :

I - $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$.

II - $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |z_2||$.

III - Se $z_1 = |z_1|(\cos \theta + i \sen \theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos \theta - i \sen \theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
- D () apenas II e III. E () todas.

Questão 03. A soma de todas as soluções da equação em \mathbb{C} : $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

- A () 2 . B () $\frac{i}{2}$. C () 0 . D () $-\frac{1}{2}$. E () $-2i$.

Questão 04. Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

- A () $\frac{7}{8}$. B () $\frac{5}{7}$. C () $\frac{5}{8}$. D () $\frac{3}{5}$. E () $\frac{3}{7}$.

Questão 05. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

- I* – $n(B) - n(A)$ é único;
II – $n(B) + n(A) \leq 128$;
III – a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é(são) verdadeira(s)

- A () apenas *I*. B () apenas *II*. C () apenas *III*.
D () apenas *I* e *II*. E () nenhuma.

Questão 06. O sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

- A () é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
B () é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.
C () é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
D () é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
E () é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

Questão 07. Considere as afirmações abaixo:

- I* – Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N , de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.
II – Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula X , de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$.

III – A matriz
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec \theta} & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$
 é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

- A () apenas *II*. B () apenas *I* e *II*. C () apenas *I* e *III*.
D () apenas *II* e *III*. E () todas.

Questão 08. Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

- A () -64 . B () -36 . C () -28 . D () 18 . E () 27 .

Questão 09. O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a
A () -5 . B () -1 . C () 1 . D () 2 . E () 5 .

Questão 10. Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^3 (x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6 , pode-se afirmar que
A () a soma de todas as raízes é 5 .
B () o produto de todas as raízes é 21 .
C () a única raiz real é maior que zero.
D () a soma das raízes não reais é 10 .
E () todas as raízes são reais.

Questão 11. A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com x e y reais, representa
A () o conjunto vazio.
B () um conjunto unitário.
C () um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
D () um conjunto com um número infinito de pontos.
E () o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

Questão 12. Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que
A () todas as raízes estão em \mathbb{Q} .
B () uma única raiz está em \mathbb{Z} e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
C () duas raízes estão em \mathbb{Q} e as demais têm parte imaginária não-nula.
D () não é divisível por $2x - 1$.
E () uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Questão 13. Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1$ *cm* e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy , a área do triângulo ABC , em cm^2 , é igual a
A () $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. B () $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C () $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D () $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. E () $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Questão 14. Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a
A () $\frac{23}{11}\pi$. B () $\frac{13}{6}\pi$. C () $\frac{24}{11}\pi$. D () $\frac{25}{11}\pi$. E () $\frac{7}{3}\pi$.

Questão 15. Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos \overline{AB} e \overline{BC} medem 8 *cm* e 6 *cm*, respectivamente. Se D é um ponto sobre \overline{AB} e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento \overline{AD} , em *cm*, é igual a
A () $\frac{3}{4}$. B () $\frac{15}{6}$. C () $\frac{15}{4}$. D () $\frac{25}{4}$. E () $\frac{25}{2}$.

Questão 16. Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre \overline{AB} . Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE . Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2 , a medida do segmento \overline{AE} , em cm , é igual a

- A () $\frac{10}{3}$. B () 5. C () $\frac{20}{3}$. D () $\frac{25}{3}$. E () 10.

Questão 17. Num triângulo ABC o lado \overline{AB} mede 2 cm , a altura relativa ao lado \overline{AB} mede 1 cm , o ângulo $\hat{A}BC$ mede 135° e M é o ponto médio de \overline{AB} . Então a medida de $\hat{B}AC + \hat{B}MC$, em radianos , é igual a

- A () $\frac{1}{5}\pi$. B () $\frac{1}{4}\pi$. C () $\frac{1}{3}\pi$. D () $\frac{3}{8}\pi$. E () $\frac{2}{5}\pi$.

Questão 18. Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm . Sabe-se ainda que \overline{AB} é o diâmetro, \overline{BC} mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $\hat{A}BC$ intercepta a circunferência no ponto D . Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2 , é igual a

- A () 14. B () 15. C () 16. D () 17. E () 18.

Questão 19. Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ cm}$. Então o raio da esfera, em cm , é igual a

- A () $\frac{10}{3}\sqrt{3}$. B () $\frac{13}{3}$. C () $\frac{15}{4}$. D () $2\sqrt{3}$. E () $\frac{10}{3}$.

Questão 20. Considere as afirmações:

- I – Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $a = 120^\circ$.
- II – Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30° , 45° , 50° , 50° e 170° .
- III – Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.
- IV – A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880° .

Destas, é(são) correta(s) apenas

- A () II. B () IV. C () II e IV.
D () I, II e IV. E () II, III e IV.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Analise a existência de conjuntos A e B , ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

Questão 22. Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e z_1, z_2, \dots, z_n as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

Questão 23. Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Questão 24. Resolva a inequação em \mathbb{R} : $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19)}$.

Questão 25. Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Questão 26. Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Questão 27. Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6 \text{ cm}$ e um plano Σ que dista 2 cm de C . Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ .

Questão 28.

a) Calcule $(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \sin^2 \frac{\pi}{5}) \cos \frac{\pi}{10} - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{10}$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$.

Questão 29. Num triângulo AOB o ângulo \hat{AOB} mede 135° e os lados \overline{AB} e \overline{OB} medem $\sqrt{2} \text{ cm}$ e $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}$, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de \overline{OB} intercepta \overline{AB} no ponto $C (\neq B)$.

a) Mostre que \hat{OAB} mede 15° .

b) Calcule o comprimento de \overline{AC} .

Questão 30. Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3} \text{ cm}$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r . O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de r .

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.